



Concours A2GP session 2016
Composition : Mathématiques 5 (algèbre, analyse)
Durée : 3 Heures

EXERCICE 1

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 2)$, $v_2 = (3, 2, 4, 7)$, $v_3 = (2, 1, 3, m^2)$, $v_4 = (5, 3, 7, 12)$, $v_5 = (2, 1, 4, 7)$ où m est un paramètre réel. On pose $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et $H_m = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1-Déterminer le rang de la famille S suivant les valeurs du paramètre réel m .

2-Donner une base du sous-espace vectoriel H_m suivant les valeurs du paramètre réel m .

On suppose $m=1$ dans la suite.

3-Donner un supplémentaire G du sous-espace vectoriel H_1 dans \mathbb{R}^4 .

4-La famille S est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.

5-Soit p la projection de \mathbb{R}^4 sur H_1 parallèlement à G . Déterminer $p(v_4)$ et $p(v_5)$.

EXERCICE 2

On pose $M_a = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

1-Pour quelles valeurs du réel a , la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2-Etude de M_{-1}

a)Déterminer les valeurs propres de M_{-1} et les sous-espaces propres associés.

b)En déduire les coefficients de M_{-1}^n pour tout entier naturel n .

3-Calculer les coefficients M_0^n pour tout entier naturel non nul n .

EXERCICE 3

Soit la série entière dont la somme f est définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$.

1-Déterminer le rayon de convergence de la série.

2-Soient les fonctions g et h définies par $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f(-x^2)$. Montrer que g et h sont des sommes de séries entières dont on précisera le rayon de convergence.

3-En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. (On pourra distinguer deux cas)

4-Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n)!}$.

EXERCICE 4

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt$ où x est un réel.

1-Déterminer l'ensemble de définition I de F . (Il s'agit du domaine de convergence de l'intégrale)

2-Calculer $F(2)$, $F(3)$ et $F(\frac{3}{2})$ (On pourra faire le changement de variable $u = \sqrt{t}$).

3-Pour tout x de I , montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x} dt$.

4-Montrer que l'application F est convexe sur I . (On pourra, pour tout t fixé dans $]0,1[$, considérer

l'application $h_t : x \mapsto \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x}$)

EXERCICE 5

Soit N l'application définie sur \mathbb{R}^2 par : pour tout (x,y) de \mathbb{R}^2 $N(x,y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{1+t^2}$.

1-Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

2-Déterminer et tracer la boule unité fermée de N .